#### שאלה 1:

נתון הבסיס .

נחשב תחילה את הנורמה של כל אחד מאיברי הבסיס:

נגדיר .

נחשב

נגדיר . קיבלנו , לכן .

נגדיר .

נחשב

נחשב

נגדיר

נחשב

נגדיר

לכן הבסיס האורתונורמלי הוא .

#### שאלה 2:

נבנה תחילה בסיס אורתונורמלי ע"פ תהליך גרם-שמידט עבור תת המרחב .

נחשב תחילה את הנורמה של : נגדיר , נחשב .

נגדיר .

נחשב

נגדיר . לכן הבסיס הוא בסיס אורתונורמלי של .

נבחר וקטור ונגדיר .

נחשב

לכן מתקיים

את בנינו ע"פ למה שהוכחנו בהרצאה, הלמה טענה כי וקטור כנ"ל מקיים עבור אורתוגונלית.

ננרמל את , מתקיים , לכן נגדיר את הוקטור ה**מנורמל**

הוקטור הוא בסה"כ מנורמל, לכן גם הוא מקיים ע"פ הלמה: .

כל ניתן להביע כקומבינציה לינארית של איברי בסיס , כלומר .

לכן נקבל: , כלומר לכל .

נדגיש כי במעבר (1) השתמשנו בלינאריות מימין שקיימת ב-, וגם הוצאנו סקלר אל מחוץ למ"פ.

*קיבלנו כי הקבוצה היא קבוצה של 3 וקטורים אורתונורמליים, לכן מהווה בסיס אורתונורמלי של .*

#### שאלה 3:

*נסמן . מתקיים כי תת-מרחב, לכן גם תת-מרחב, וכן מתקיים .*

*נוכיח כי .*

***:*** *יהי , אזי לכל מתקיים .*

*יהי , אזי מתקיים כאשר .*

*לכן מתקיים לכל :*

*קיבלנו כי מקיים לכל , לכן , לכן .*

**:** יהי , לכן לכל מתקיים , בפרט כל מקיים , לכן לכל , ולכן , לכן .

הוכחנו הכלה כפולה, לכן מתקיים ולכן גם מתקיים .

נוכיח כי .

**:** יהי , אזי מהגדרת נקבל כי לכל מתקיים .

הגדרת היא: .

עונה על הגדרה זו, לכן , ולכן .

**:** יהי , אזי מהגדרת נקבל כי לכל מתקיים .

מתקיים , לכן קיימת הצגה יחידה של כסכום ישר שכזה, כלומר קיימים כך שמתקיים . מתקיים וגם .

נסתכל על , מתקיים , נפתח ונקבל:

כלומר , וכיוון שזה נכון לכל הרי שבהכרח מתקיים , כלומר , לכן .

הוכחנו כי , לכן .

#### שאלה 4:

נוכיח תחילה כי הוא היטל, כלומר מתקיים .

נתון כי הם היטלים, לכן מתקיים וגם נתון .

לכן מתקיים: , לכן הוא היטל.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **הסברי המעברים:** | 1. הגדרת חזקה | 1. נתון |
| 1. הוא היטל, לכן | 1. נתון | 1. הוא היטל, לכן |

נתון כי הוא היטל על , לכן מתקיים , ובאופן דומה מתקיים .

הגדרת היא .

נוכיח כי מתקיים .

**:** יהי , אזי קיים כך שמתקיים .

לכן מתקיים . אם נסמן אזי נקבל ולכן , כלומר .

נתון כי , לכן מתקיים , אם נסמן אזי נקבל ולכן , כלומר .

לכן ולכן .

**:** יהי .

בפרט , לכן , לכן קיים כך שמתקיים .

בפרט , לכן , לכן קיים כך שמתקיים .

קיבלנו כי מתקיים .

נכפול כל אגף משמאל ב- ונקבל: .

*הוא היטל, לכן מתקיים , לכן: .*

*קיבלנו , לכן , לכן .*

*הוכחנו כי .*

*נותר להוכיח כי .*

*נתון כי הוא היטל אורתוגונלי, לכן מתקיים .*

***:*** *יהי , אזי כאשר .*

*לכן מתקיים:*

*לכן , ומכאן .*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **הסברי המעברים:** |  | 1. פתיחת סוגריים |
| 1. נתון | 1. , לכן , לכן | |

**:** יהי , לכן מתקיים .

*נגדיר , לכן מתקיים , לכן , כלומר .*

*נגדיר , לכן מתקיים , לכן , כלומר .*

*כמו כן מתקיים , לכן* , ולכן .

הוכחנו כי , לכן ולכן הוא ההיטל האורתוגונלי על .

#### שאלה 5:

**סעיף א':**

יהי אזי ניתן להביע אותו כק"ל של איברי הבסיס הא"נ, כלומר , כאשר .

יהי אזי ניתן להביע אותו כק"ל של איברי הבסיס הא"נ, כלומר , כאשר .

לכן לכל מתקיים: .

לכן מתקיים:

**סעיף ב':**

יהי אזי ניתן להביע אותו כק"ל של איברי הבסיס הא"נ, כלומר , כאשר .

לכן לכל מתקיים: .

לכן מתקיים:

.